Erinnerung: Mit $1 := S0$ existieren eindeutige zweistellige Verknüpfungen

$$\omega \times \omega \to \omega, \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} x + y \\ x \cdot y = xy \\ x^y \end{cases}$$

so dass für alle $x, y \in \omega$ gilt

$x + 0 \ = \ x$	$x + Sy \ = \ S(x + y)$
$x \cdot 0 \ = \ 0$	$x \cdot Sy \ = \ x \cdot y + x$
$x^0 \ = \ 1$	$x^{Sy} \ = \ x^y \cdot x$

Diese Verknüpfungen besitzen die folgenden Grundeigenschaften:

Proposition: Für alle $x, y, z \in \omega$ gilt:

$\forall x: 0 + x = x$

$\forall x, y:$ $Sx + y = S(x+y)$

$x + y \ = \ y + x$	$x \cdot y \ = \ y \cdot x$
$x + (y + z) \ = \ (x + y) + z$	$x \cdot (y \cdot z) \ = \ (x \cdot y) \cdot z$
$0 + x \ = \ x$	$1 \cdot x \ = \ x$
$0 \ \neq \ 1$	$x \cdot (y + z) \ = \ x \cdot y + x \cdot z$

$x^{y+z} \ = \ x^y \cdot x^z$	$x^0 \ = \ 1$
$(xy)^z \ = \ x^z \cdot y^z$	$x^1 \ = \ x$
$x^{yz} \ = \ (x^y)^z$	$1^x \ = \ 1$

Definition: Für alle $x, y \in \omega$ setzen wir

$$\boxed{x \leqslant y :\equiv (\exists z \in \omega \colon x + z = y).}$$

Diese Relation ist alleine mittels der Peano-Axiome definiert. In dem Modell ω kennen wir sie aber schon:

Proposition: Für alle $x, y \in \omega$ gilt

$$\boxed{x \leqslant y \;\longleftrightarrow\; x \in y \vee x = y.}$$

Bew.: Sei $\varphi(x) :\equiv \left(\forall y \in \omega : (x \leq y \leftrightarrow x \in y \vee x = y)\right)$.

$x = 0$: $\varphi(0) \iff \forall y \in \omega : 0 \leq y \leftrightarrow \underline{0 \in y \vee 0 = y}$.

Aber: $0 + y = y \Rightarrow 0 \leq y$, und dies gilt auch.

Sei jetzt x beliebig mit $\varphi(x)$. Zu zeigen: $\varphi(Sx)$.

Sei $y \in \omega$.

Annahme $Sx \leq y \Rightarrow \exists z : \underbrace{Sx + z}_{S(x+z)} = y \Rightarrow y = Sy'$ für $y' := x + z$.

$\Rightarrow x \leq y'$

$\varphi(x) \Rightarrow x \in y' \vee x = y'$

$\Rightarrow Sx \in Sy' \vee Sx = Sy'$

$\Rightarrow Sx \in y \vee Sx = y$

Annahme $\underbrace{Sx \in y}_{\Rightarrow Sx \subseteq y} \vee Sx = y \Rightarrow \underbrace{Sx}_{x \cup \{x\}} \subseteq y. \Rightarrow x \in y.$

$\varphi(x) \Rightarrow x \leq y$, also $\exists z \in \omega : \boxed{x + z = y}$.

Wäre $z = 0$, wäre $y = x + 0 = x \Rightarrow$ Widerspruch zu $x \notin x$.

Also ist $z \neq 0$, d.h. $\exists z' \in \omega : z = Sz'$.

Jetzt ist $y = x + Sz' = S(x + z') = Sx + z'$.

$\Rightarrow Sx \leq y$.

Damit gilt $\varphi(0)$ und

$\forall x : \varphi(x) \to \varphi(Sx)$.

Also gilt $\forall x \in \omega : \varphi(x)$.

qed.

Weiter gelten für diese Relation die folgenden Grundeigenschaften in Beziehung zu 0, S, $+$ und $\cdot$:

Proposition: Für alle $x, y, z \in \omega$ gilt:

$x \leqslant x$	$0 \leqslant x$
$x \leqslant y \wedge y \leqslant x \longrightarrow x = y$	$x \leqslant y \longleftrightarrow Sx \leqslant Sy$
$x \leqslant y \wedge y \leqslant z \longrightarrow x \leqslant z$	$x \leqslant y \longleftrightarrow x + z \leqslant y + z$
$x \leqslant y \ \vee \ y \leqslant x$	$x \leqslant y \ \longrightarrow \ xz \leqslant yz$

$\forall x:$ $x+0=x$ also $x \leq x$.

Äquivalente Versionen des Auswahlaxioms

Auswahlaxiom (AC): Für jede Menge F, so dass jedes $X \in F$ eine nichtleere Menge ist, existiert eine Funktion

$$f\colon F \to \bigcup F \quad \text{mit} \quad \forall X \in F\colon f(X) \in X.$$

Übersetzt: Für jede Menge F, so dass jedes $X \in F$ eine nichtleere Menge ist, ist das kartesische Produkt $\bigtimes_{X \in F} X$ nichtleer.

Wohlordnungsprinzip (WOP): Auf jeder Menge existiert eine Wohlordnung.

Kuratowski-Zorn-Lemma (KZL): Jede nichtleere Partialordnung $(X, \leqslant)$, so dass jede Kette $K \subseteq X$ eine obere Schranke besitzt, besitzt ein maximales Element.

Alle diese sind unter ZF äquivalent.

(Vgl. [Ebbinghaus Kap.VIII Satz 2.3 und 3.2.)

Satz: ZF $\vdash$ AC $\longrightarrow$ WOP.

Beweis: Sei X eine Menge. Nach AC existiert eine Funktion $c\colon \mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\} \to X$ mit $\forall Y : c(Y) \in Y$.

Wir nennen ein Paar $(A, \leqslant)$ einen *Anfang*, falls gilt:

$$(*) \qquad \begin{bmatrix} A \subseteq X \text{ und} \\ \leqslant \text{ ist eine Wohlordnung auf } A \text{ und} \\ \forall a \in A\colon a = c(X \setminus A_{<a}). \end{bmatrix}$$

Diese Bedingung lässt sich durch ein Prädikat ausdrücken.

Im folgenden versehen wir jedes Anfangssegment mit der induzierten Ordnung.

Behauptung 1: Für je zwei Anfänge $(A, \leqslant)$ und $(A', \leqslant')$ ist einer ein Anfangssegment des anderen.

Beweis: Sei $(A', \le')$ kein Anfangssegment von $(A, \le)$.

Beh. 1a: Für jedes $a \in A$ ist $(A_{\le a}, \le|A_{\le a})$ ein Anfangssegment von $(A', \le')$.

Bew.: Wenn nicht, existiert ein bzgl. $\le$ kleinstes Gegenbeispiel $a \in A$.

Für jedes $b \in A$ mit $b < a$ ist dann $(A_{\le b}, \le|A_{\le b})$ ein Anfangssegment von $(A', \le')$.

Also ist $(A_{<a}, \le|A_{<a})$ auch ein Anfangssegment von $(A', \le')$.

Ist $A_{<a} = A'$, ist $(A', \le')$ ein Anfangssegment von $(A, \le)$. Widerspr.!

Also ist $A_{<a} \subsetneqq A'$. Sei a' das bzgl. $\le'$ kleinste Element in $A' \setminus A_{<a}$ $\Rightarrow A_{<a} = A'_{<a'}$.

$\Rightarrow \quad a \overset{(*)}{=} c(X \setminus A_{<a}) = c(X \setminus A'_{<a'}) \overset{(*)}{=} a'$.

$\Rightarrow \quad (A_{\le a}, \le|A_{\le a}) = (A'_{\le a'}, \le'|A'_{\le a'})$

$\Rightarrow \quad (A_{\le a}, \le|A_{\le a})$ ist Anfangsabschnitt von $(A', \le')$. qed (Beh. 1a).

Nun ist $A = \bigcup_{a \in A} A_{\le a} \Rightarrow (A, \le)$ ist Anfangsabschnitt von $(A', \le')$ qed (Beh. 1).

Sei jetzt B die Vereinigung der Mengen A in allen Anfängen $(A, \leqslant)$. Dies ist eine Menge, da die Bedingung $(*)$ durch ein Prädikat beschrieben werden kann.

Behauptung 2: Es gibt eine Ordnung $\preceq$ auf B, so dass $(B, \preceq)$ ein Anfang ist.

Beweis: Nach der Konstruktion ist $B \subseteq X$.

Für je zwei $a, a' \in B$ wähle Anfang $(A, \leq)$ mit $a \in A$, $(A', \leq')$ mit $a' \in A'$ $\Rightarrow$ Vergleiche a, a' in A oder A'.

$\leadsto$ Totalordnung auf B.

Sei $X \subset B$ nichtleer. Wähle $a \in X$ und Anfang $(A, \leq)$ mit $a \in A$.

$\Rightarrow X \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \exists$ kleinstes Element $a_0 \in X \cap A$ bzgl. $\leq$

Für jedes $a' \in X$ wähle Anfang $(A', \leq')$ mit $a' \in A'$.

$a' \in A \Rightarrow a' \in X \cap A \Rightarrow a_0 \leq a'$.
oder
$a' \notin A \Rightarrow (A, \leq)$ ist Anfangssegment von $(A', \leq')$
$\Rightarrow a_0 < a'$.
$\Rightarrow a_0$ ist kleinstes Element von X bzgl. $\preceq$.
qed.

Behauptung 3: Es ist $B = X$.

Beweis: Wenn nicht, erweitere B zu $B \cup \{c(X \setminus B)\} =: B'$ und $\preceq'$ so dass $\forall b \in B: b \prec' c(X \setminus B)$.
$\Rightarrow B'$ Anfang Widerspruch zur Konstruktion von B. qed.

Rest . . . . .

Nun ist $\preceq$ die gesuchte Wohlordnung auf X. $\square$

qed.

Satz: ZF $\vdash \boxed{\text{WOP} \longrightarrow \text{KZL}}$.

Beweis: Sei $(X, \leqslant)$ eine nichtleere Partialordnung, so dass jede Kette $K \subseteq X$ eine obere Schranke besitzt. Wähle eine Wohlordnung $\preceq$ auf X. Betrachte die Klassenfunktion

$$F(x, f) := \begin{cases} \bigcup\limits_{y \in \mathrm{Def}(f)} f(y) \cup \{x\} & \text{falls dies eine Teilmenge von } X \text{ und eine Kette bezüglich } \leqslant \text{ ist,} \\ \bigcup\limits_{y \in \mathrm{Def}(f)} f(y) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach dem Rekursionssatz existiert eine Funktion A auf X mit $\forall x \in X \colon A(x) = F(x, f|X_{\prec x})$. Das heisst, für alle $x \in X$ gilt:

$$(*) \qquad A(x) = \begin{cases} \bigcup\limits_{y \in X,\, y \prec x} A(y) \cup \{x\} & \text{falls dies eine Teilmenge von } X \text{ und eine Kette bezüglich } \leqslant \text{ ist,} \\ \bigcup\limits_{y \in X,\, y \prec x} A(y) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Behauptung 1: Für alle $x \in X$ gilt $A(x) \subseteq X$.

Beweis: Wenn nicht, ist $\{x \in X \mid A(x) \not\subseteq X\}$ nichtleer,
Sei x ihr kleinstes Element bzgl. $\prec$.
$\Rightarrow \forall y \in X_{\prec x} : A(y) \subseteq X$.
$(*) \Rightarrow A(x) \subseteq X$ Widerspruch. qed

Behauptung 2: Für alle $x, y \in X$ mit $y \preceq x$ gilt $A(y) \subseteq A(x)$.

Bew.: Für feste $y \in X$ betrachte $\{x \in X \mid y \preceq x \wedge A(y) \nsubseteq A(x)\}$.
Ist diese Menge nicht leer, wähle ihr kleinstes Element x. $\Rightarrow$ Widerspruch zu $(*)$. qed.

Behauptung 3: Für jedes $x \in X$ ist $A(x)$ eine Kette bezüglich $\leqslant$.

Bew.: Sei x ein kleinstes Gegenbeispiel
$\Rightarrow \forall y \in X: y \prec x \Rightarrow A(y)$ ist Kette bzgl. $\leq$
$\Rightarrow \bigcup_{y \prec x} A(y)$ Kette. Nach $(*)$ folgt $A(x)$ Kette. qed.

Behauptung 4: Die Menge $B := \bigcup_{x \in X} A(x)$ ist eine Kette bezüglich $\leqslant$.

Beweis wie Beh. 3.

Behauptung 5: Die Menge B ist eine maximale Kette bezüglich $\leqslant$.

Bew.: Wenn nicht, existiert $x \in X \setminus B$ sodass $B \cup \{x\}$ eine Kette bzgl. $\leq$ ist.
$\Rightarrow \forall y \prec x: A(y) \subseteq B.$ $\Rightarrow$

$$A(x) = \Leftarrow \underbrace{\bigcup_{y \prec x} A(y) \cup \{x\}}_{\text{Kette} \subseteq X} \subseteq \underbrace{B \cup \{x\}}_{\Leftarrow\ \text{Kette in } X}$$

Wegen $x \in A(x) \subseteq B$ folgt Widerspruch! qed

Behauptung 6: Jede obere Schranke von B ist ein maximales Element von X bezüglich $\leqslant$.

Beweis: Wenn x nicht maximal ist, existiert $y \in X$ mit $x < y$.
Dann gilt $\forall b \in B: b < y$.
$\Rightarrow B \cup \{y\}$ echt größere Kette! Widerspruch! qed

$\square$

Satz: $\boxed{\text{ZF} \vdash \text{KZL} \longrightarrow \text{AC.}}$

Gesucht: $f\colon F \to \bigcup F$ mit $\forall x \in F\colon f(x) \in x$.

äquivalent: $\mathrm{Graph}(f) \subseteq F \times \bigcup F$.

Beweis: Sei F eine Menge mit $\forall x \in F\colon x \neq \varnothing$. Setze

$$S := \left\{ A \subseteq F \times \bigcup F \;\middle|\; \begin{array}{l} A \text{ ist Graph einer Funktion } f\colon X \to \bigcup F \\ \text{für eine Teilmenge } X \subseteq F, \\ \text{so dass } \forall x \in X\colon f(x) \in x. \end{array} \right\}$$

Diese Menge ist partialgeordnet durch $\subseteq$.

Behauptung 1: Jede Kette $K \subseteq S$ hat die obere Schranke $\bigcup K$.

Bew.: $B := \bigcup K \subseteq F \times \bigcup F$.

$Y := \mathrm{Def}(B) := \{x \in F \mid \exists y \in \bigcup F : \langle x,y \rangle \in B\}$.

Wäre B nicht Graph einer Funktion, gäbe es $x \in Y$ und $y, y' \in \bigcup F$: $\langle x,y \rangle, \langle x,y' \rangle \in B$.

Wähle $A \in K$: $\langle x,y \rangle \in A$.

$A' \in K$: $\langle x,y' \rangle \in A'$.

Da K eine Kette ist, gilt $A \subseteq A'$ oder $A' \subseteq A$.

$\langle x,y \rangle, \langle x,y' \rangle \in A'$

Da A' Graph einer Funktion ist, folgt $y = y'$

analog: $y = y'$.

Also ist B Graph einer Funktion.

Wegen $\langle x,y \rangle \in A$ gilt auch $y \in x$.

Folglich ist $B \in S$.

Nach Konstruktion ist $\forall A \in K\colon A \subseteq B$.

qed

Wegen $\varnothing \in S$ ist S nichtleer. Nach Behauptung 1 und KZL besitzt S also ein bezüglich $\subseteq$ maximales Element A. Sei $f\colon X \to \bigcup F$ die entsprechende Funktion.

Behauptung 2: Es ist $X = F$.

Beweis: Wenn nicht, existiert $x \in F \setminus X$, und $y \in x$.
und $A' := A \cup \{\langle x, y\rangle\} \in S$ mit $A \subsetneq A'$
Widerspruch zur Maximalität von A. qed.

Die Funktion $f\colon F = X \to \bigcup F$ hat die gesuchte Eigenschaft $\forall x \in X\colon f(x) \in x$. $\square$